Zagadnienia do egzaminu dyplomowego

Egzamin magisterski

Teoria miary i całki

1. Zbiory borelowskie.
2. Miara. Przykłady. Własności.
3. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a,
4. Całka względem miary.
5. Kryterium Lebesgue'a całkowalności funkcji w sensie Riemanna.
6. Twierdzenie Fubiniego o całce na produkcie.
7. Twierdzenie Radona–Nikodyma. Pochodna Radona–Nikodyma.

Topologia

1. Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$.
2. Przestrzenie spójne i łukowo spójne, komponenty przestrzeni niespójnych.
3. Rozcinanie przestrzeni spójnej, na przykład kopie sfery $(n-1)$–wymiarowej w $\mathbb{R}^n$ i twierdzenie Jordana.
4. Własność punktu stałego i różne twierdzenia o punkcie stałym.
5. Wielościany n–wymiarowe zwarte, triangulacje.
6. Klasyfikacja powierzchni zamkniętych.
7. Przykłady rozmaitości wyższych wymiarów.

Analiza funkcjonalna

1. Przestrzenie liniowe: własności przestrzeni liniowych, podprzestrzenie, przestrzenie ilorazowe, bazy Hamela.
2. Przestrzenie unormowane: seminormy i normy, funkcjonał Minkowskiego, nierówności Höldera i Schwarza, zbieżność w przestrzeniach unormowanych, równoważność norm.
3. Przestrzenie Banacha i Hilberta i ich najważniejsze własności.
4. Operatory liniowe: typy operatorów liniowych i najważniejsze twierdzenia charakteryzujące operatory liniowe.
5. Przestrzenie sprzężone: twierdzenie Hahna–Banacha, twierdzenie o wydobywaniu normy, przestrzenie refleksywne.
6. Topologie słabe i *–słabe. Twierdzenie Banacha–Alaoglu.
7. Szeregi w przestrzeniach unormowanych i szeregi ortogonalne w przestrzeniach Hilberta.

Analiza zespolona

1. Różniczkowalność w dziedzinie zespolonej (przykłady funkcji elementarnych: funkcje wymierne, e^z, $\log z$).
2. Równania Cauchy–Riemanna i konforemność.
3. Wzór całkowy Cauchyego z zastosowaniami.
4. Szeregi potęgowe, promień zbieżności, rozwijanie funkcji elementarnych.
5. Punkty osobliwe, rozwinięcia Laurenta, reziduum punktu osobliwego.
6. Obliczanie całek metodą reziduów.
7. Przekształcenia konforemne (własności homografii).

Analiza matematyczna

1. Całki po krzywych, zorientowane i niezorientowane, wzór Greena.
2. Całki po powierzchniach, zorientowane i niezorientowane, wzór Gaussa.
3. Gradient funkcji, dywergencja pola wektorowego i rotacja pola wektorowego.
4. Twierdzenie Stokesa (pola wektorowe, które są gradientami funkcji).
5. Ortogonalność w przestrzeniach funkcyjnych.
6. Szeregi Fouriera w postaci rzeczywistej i zespolonej (przykłady).
7. Własności funkcji harmonicznych.

Prawdopodobieństwo i statystyka

1. Przedział ufności dla wartości średniej.
2. Przedział ufności dla wariancji i odchylenia standardowego.
3. Testowanie hipotez statystycznych: hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna, błąd pierwszego i drugiego rodzaju, zbiór krytyczny.
4. Testowanie hipotezy o wartości przeciętnej, o dwóch wartości przeciętnych.
5. Testowanie hipotezy o wskaźniku struktury, o dwóch wskaźnikach struktury.
6. Testowanie hipotezy o wariancji, o dwóch wariancjach.
7. Testy zgodności: chi-kwadrat, Kolmogorowa.

Równania różniczkowe

1. Liniowe układy równań różniczkowych (funkcja *exp* na macierzach).
2. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy.
3. Równania drugiego rzędu (oscylator harmoniczny z wymuszaniem, tłumieniem, układ o jednym stopniu swobody).
4. Portrety fazowe dla układów na płaszczyźnie (węzeł, siodło, ognisko, centrum).
5. Równanie przewodnictwa ciepła (warunki brzegowe, rozwiązanie metodą Fouriera).
6. Równanie falowe (warunki początkowe, rozwiązania d'Alamberta i Fouriera).
7. Równanie Laplace (zagadnienie Dirichleta, własności funkcji harmonicznych).

Metody informatyki

1. Obliczenia (dokładność, precyzja, propagacja błędów, poprawność numeryczna).
2. Hipoteza Churcha–Turinga.
3. NP–zupełność.